数理解析研究所講究録 第2086巻 2018年 139-143

Nilpotent π-subgroups and gluing complexes

山口大学・教育学部　飯寄信保
Nobuo Iiyori
Department of Mathematics, Faculty of Education,
Yamaguchi University, Yamaguchi 753-8511, Japan
iiyori@yamaguchi-u.ac.jp

千葉大学・教育学部　澤辺正人
Masato Sawabe
Department of Mathematics, Faculty of Education,
Chiba University, Chiba 263-8522, Japan
sawabe@faculty.chiba-u.jp

この報告は 2017 年 12 月 13 日（水）に京都大学数理解析研究所で行った講演を再現するものである．講演内容はベキ零 π-部分群から定義される部分群複体に関するいくつかの考察である．具体的には以下で述べる命題 2.3, 定理 2.5, 命題 3.1, 及び第 4 節に於ける応用の紹介であり，これらは論文 [3, 5] のごく一部である．本研究の全体につては [3, 5] を参照されたい．一方，一連の研究内容，及びその動機などについては論文 [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8] あるいは報告集 [10, 11, 12, 13, 14] をご覧頂きたい．

1　背景

まずは記号の定義などから述べる．G を有限群とし，$\mathrm{Sgp}(G)$ を G の部分群全体の集合とする．G の部分群族 $\mathcal{H} \subseteq \mathrm{Sgp}(G)$ に対して $S(\mathcal{H})$ を $\mathcal{H}$ に属する部分群からなる包含列全体の集合とする．言い換えれば，$\mathcal{H}$ を包含関係によって半順序集合 $(\mathcal{H}, \subseteq)$ と見なしたときの全順序部分集合の全体が $S(\mathcal{H})$ である．このとき組 $\Delta(\mathcal{H}) := (\mathcal{H}, S(\mathcal{H}))$ は $\mathcal{H}$ を頂点集合，$S(\mathcal{H})$ を単体の集合とする抽象単体複体を与える．複体 $\Delta(\mathcal{H})$ を G の**部分群複体**という．以下 $\Delta(\mathcal{H})$ を単に $\mathcal{H}$ で表すことにする．

■**p-部分群複体 $\mathcal{S}_p(G)$**　素数 $p \in \pi(G)$ に対して $\mathcal{S}_p(G)$ を G の非自明な p-部分群全体の集合とする．これは Brown 複体とも呼ばれる．p-部分群複体 $\mathcal{S}_p(G)$ に関してよく知られている事実を確認しておく．

1. $\mathcal{S}_p(G)$ の部分複体 $\mathcal{B}_p(G) := \{U \in \mathcal{S}_p(G) \mid O_pN_G(U) = U\} \subseteq \mathcal{S}_p(G)$ に対して $\mathcal{S}_p(G)$ は $\mathcal{B}_p(G)$ と互いにホモトピー同値 $\mathcal{S}_p(G) \simeq \mathcal{B}_p(G)$ である．部分群 $U \in \mathcal{B}_p(G)$ は p-radical と呼ばれる．
2. p-radical 部分群にはモデルケースが存在する．標数 p の有限体上で定義された Lie 型の群 L に対して $\mathcal{B}_p(L)$ は L の unipotent radical 全体を与える．言い換えれば，$\mathcal{B}_p(L)$ は L に付随する幾何，ビルディング，を与える．このことから一般に $\mathcal{B}_p(G)$ は幾何的に重要な対象であり，その一環として，全ての散在型有限単純群に対する p-radical 部分群の分類がきちんと存在しているのである．

2　ベキ零 π-部分群複体 $\mathcal{L}_\pi(G)$ の導入

以上の背景を踏まえて，我々の一つの方向性としては，このような p-部分群複体 $\mathcal{S}_p(G)$ の自然な意味のある拡張を何か作りたいということである．そこで次のような部分群族（複体）を新たに導入する．

定義 2.1（page 732 in [3]）　空でない部分集合 $\pi \subseteq \pi(G)$ に対して $\mathcal{N}_\pi(G)$ を G の非自明なベキ零 π-部分群全体の集合とする．このとき $\mathcal{L}_\pi(G)$ を次のように定める．

$$\mathcal{L}_\pi(G) := \{U \in \mathcal{N}_\pi(G) \mid O_\pi ZN_G(U) \leq U\} \subseteq \mathcal{N}_\pi(G).$$

注意 2.2　p-radical 部分群 $U \in \mathcal{B}_p(G)$ に対してその定義から $O_pN_G(U) = U$ が成り立つ．また一般に $O_pZN_G(U)$ は $N_G(U)$ の正規 p-部分群であることから $O_pZN_G(U) \leq O_pN_G(U) = U$ を得る．つまり $U \in \mathcal{L}_{\{p\}}(G)$ となる．従って $\mathcal{L}_{\{p\}}(G)$ は $\mathcal{B}_p(G)$ を完全に含んでいることになる．

命題 2.3（Proposition 4.3 in [3]）　$\mathcal{L}_\pi(G)$ と $\mathcal{N}_\pi(G)$ はホモトピー同値 $\mathcal{L}_\pi(G) \simeq \mathcal{N}_\pi(G)$ である．

我々としては，$\mathcal{N}_\pi(G)$ と互いにホモトピー同値となるような "ほぼほぼ極小な" 部分複体 $\mathcal{L}_\pi(G) \subseteq \mathcal{N}_\pi(G)$ を捕まえたという感触である．

注意 2.4
1. 命題 2.3 のホモトピー同値性に対して π を素数 p の一点集合とすれば $\mathcal{L}_{\{p\}}(G) \simeq \mathcal{N}_{\{p\}}(G) = \mathcal{S}_p(G) \simeq \mathcal{B}_p(G)$ が導かれる．
2. $\mathcal{S}_p(G)$ の部分集合を $\mathcal{S}_p(G)^> := \{U \in \mathcal{S}_p(G) \mid \mathcal{S}_p(G)_{>U}$ は可縮でない $\}$ で定める．同様に一般の半順序集合 $(\mathcal{P}, \leq)$ に対して $\mathcal{P}^>$ が定義される．このとき $\mathcal{S}_p(G)^> \subseteq \mathcal{B}_p(G)$ がとなることがよく知られている．さらに，いわゆる Quillen 予想を仮定すると等号 $\mathcal{S}_p(G)^> = \mathcal{B}_p(G)$ が成立する．この類似として $\mathcal{N}_\pi(G)^>$ を考察することにより $\mathcal{N}_\pi(G)^> \subseteq \mathcal{L}_\pi(G)$ を示すことが出来る．実際に，この包含関係から $\mathcal{L}_\pi(G) \simeq \mathcal{N}_\pi(G)$ が導かれている．

以上の注意を振り返ってみると $\mathcal{L}_{\{p\}}(G)$ は $\mathcal{B}_p(G)$ を完全に含んでおり，かつそれらは互いにホモトピー同値であり，かつ組 $\big(\mathcal{S}_p(G)^>, \mathcal{B}_p(G)\big)$ と組 $\big(\mathcal{N}_\pi(G)^>, \mathcal{L}_\pi(G)\big)$ の状況も同じであることから，$\mathcal{L}_\pi(G)$ は $\mathcal{B}_p(G)$ の拡張概念として "π-radical" と呼ばれるべきものになっていると我々は考えている．即ち，$\mathcal{L}_\pi(G)$ を新しい研究対象に加えて良いであろうということである．その一環として，対称群 S_n の $\mathcal{L}_\pi(S_n)$ (see [3, Sect. 5]) と一般線形群 $GL(n, q)$ の $\mathcal{L}_\pi(GL(n, q))$ (see [5, Sect. 4]) を決定するアルゴリズムを与えた．同様に全ての散在型有限単純群 S に対する $\mathcal{L}_\pi(S)$ のリストを作成しておくことも重要であると考えている．

さて，$\mathcal{N}_\pi(G)$ と $\mathcal{L}_\pi(G)$ の基本性質の一つとして次を挙げることが出来る．

定理 2.5（Theorem 3.4 in [5]）　空でない部分集合 $\pi_1, \pi_2 \subseteq \pi(G)$ に対して $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ と仮定する．このとき次のホモトピー同値が成り立つ．

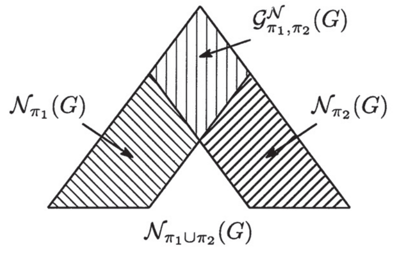
$$\mathcal{N}_{\pi_1 \cup \pi_2}(G) \setminus \mathcal{N}_{\pi_1}(G) \simeq \mathcal{N}_{\pi_2}(G), \quad \mathcal{L}_{\pi_1 \cup \pi_2}(G) \setminus \mathcal{L}_{\pi_1}(G) \simeq \mathcal{L}_{\pi_2}(G).$$

3 Gluing complexes の導入

素数 p の一点集合ではなく，素数の集合 $\pi \subseteq \pi(G)$ を考えることによって，例えば p と q の交わりであるとか，或いは π_1 と π_2 の交わりを考えることが可能になる．そこで改めて，空でない部分集合 $\pi_1, \pi_2 \subseteq \pi(G)$ に対して $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ と仮定する．次のような集合を用意する．

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{\underline{\pi_1} \cup \pi_2}(G) &:= \{H \in \mathcal{N}_{\pi_1 \cup \pi_2}(G) \mid \pi(H) \cap \pi_1 \neq \emptyset\} = \mathcal{N}_{\pi_1 \cup \pi_2}(G) \setminus \mathcal{N}_{\pi_2}(G),\\
\mathcal{N}_{\pi_1 \cup \underline{\pi_2}}(G) &:= \{H \in \mathcal{N}_{\pi_1 \cup \pi_2}(G) \mid \pi(H) \cap \pi_2 \neq \emptyset\} = \mathcal{N}_{\pi_1 \cup \pi_2}(G) \setminus \mathcal{N}_{\pi_1}(G),\\
\mathcal{G}^{\mathcal{N}}_{\pi_1, \pi_2}(G) &:= \mathcal{N}_{\underline{\pi_1} \cup \pi_2}(G) \cap \mathcal{N}_{\pi_1 \cup \underline{\pi_2}}(G) = \mathcal{N}_{\pi_1 \cup \pi_2}(G) \setminus \big(\mathcal{N}_{\pi_1}(G) \uplus \mathcal{N}_{\pi_2}(G) \big).
\end{aligned}$$

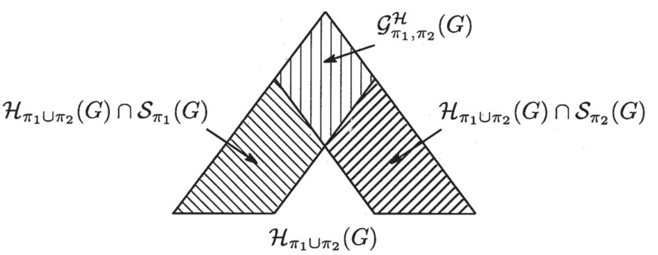
ここで $\mathcal{N}_{\pi_1 \cup \pi_2}(G) = \mathcal{N}_{\underline{\pi_1} \cup \pi_2}(G) \cup \mathcal{N}_{\pi_1 \cup \underline{\pi_2}}(G)$ であることにも注意する．$\mathcal{N}_{\pi_1 \cup \pi_2}(G)$ を図で表すと次のようになる．



以上はベキ零という群論的性質を持っている $(\pi_1 \cup \pi_2)$-部分群に関することであると解釈すれば, これはもっと一般的なセッティングで議論することが出来る. まず, 空でない部分集合 $\pi \subseteq \pi(G)$ に対して $\mathcal{S}_\pi(G)$ を非自明な π-部分群全体からなる集合とする. このとき部分族 $\mathcal{H}_{\pi_1\cup\pi_2}(G) \subseteq \mathcal{S}_{\pi_1\cup\pi_2}(G)$ に対して, 次のような集合を用意する.

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\underline{\pi_1}\cup\pi_2}(G) &:= \{H \in \mathcal{H}_{\pi_1\cup\pi_2}(G) \mid \pi(H) \cap \pi_1 \neq \emptyset\} = \mathcal{H}_{\pi_1\cup\pi_2}(G) \setminus \left(\mathcal{H}_{\pi_1\cup\pi_2}(G) \cap \mathcal{S}_{\pi_2}(G) \right), \\
\mathcal{H}_{\pi_1\cup\underline{\pi_2}}(G) &:= \{H \in \mathcal{H}_{\pi_1\cup\pi_2}(G) \mid \pi(H) \cap \pi_2 \neq \emptyset\} = \mathcal{H}_{\pi_1\cup\pi_2}(G) \setminus \left(\mathcal{H}_{\pi_1\cup\pi_2}(G) \cap \mathcal{S}_{\pi_1}(G) \right), \\
\mathcal{G}^{\mathcal{H}}_{\pi_1,\pi_2}(G) &:= \mathcal{H}_{\underline{\pi_1}\cup\pi_2}(G) \cap \mathcal{H}_{\pi_1\cup\underline{\pi_2}}(G) = \{H \in \mathcal{H}_{\pi_1\cup\pi_2}(G) \mid \pi(H) \cap \pi_i \neq \emptyset \ (i = 1, 2)\}.
\end{aligned}$$

ここで $\mathcal{H}_{\pi_1\cup\pi_2}(G) = \mathcal{H}_{\underline{\pi_1}\cup\pi_2}(G) \cup \mathcal{H}_{\pi_1\cup\underline{\pi_2}}(G)$ であることにも注意する. $\mathcal{H}_{\pi_1\cup\pi_2}(G)$ を図で表すと次のようになる.



$\mathcal{G}^{\mathcal{H}}_{\pi_1,\pi_2}(G)$ を $\mathcal{H}$ に関する G の (π_1, π_2)-gluing complex と名付けることにする. $\mathcal{H}_{\pi_1\cup\pi_2}(G)$ の例としては既に現れている $\mathcal{N}_{\pi_1\cup\pi_2}(G)$ と $\mathcal{L}_{\pi_1\cup\pi_2}(G)$ の他に, $\mathcal{A}b_{\pi_1\cup\pi_2}(G)$ (可換部分群), $\mathcal{A}_{\pi_1\cup\pi_2}(G)$ (基本可換部分群の直積部分群) などが想定される. gluing complex の基本性質として次を挙げることが出来る.

命題 3.1 (Propositions 3.13 and 3.14 in [5]) 上記の記号の下で次が成り立つ.

1. $\mathcal{G}^{\mathcal{A}b}_{\pi_1,\pi_2}(G) \simeq \mathcal{G}^{\mathcal{A}}_{\pi_1,\pi_2}(G) \simeq \mathcal{G}^{\mathcal{N}}_{\pi_1,\pi_2}(G)$.
2. $\mathcal{L}_{\pi_1\cup\pi_2}(G) \subseteq \mathcal{H}_{\pi_1\cup\pi_2}(G) \subseteq \mathcal{N}_{\pi_1\cup\pi_2}(G)$ なる $\mathcal{H}_{\pi_1\cup\pi_2}(G)$ に対して $\mathcal{G}^{\mathcal{H}}_{\pi_1,\pi_2}(G) \simeq \mathcal{G}^{\mathcal{N}}_{\pi_1,\pi_2}(G)$ が成り立つ. 特に $\mathcal{G}^{\mathcal{L}}_{\pi_1,\pi_2}(G) \simeq \mathcal{G}^{\mathcal{N}}_{\pi_1,\pi_2}(G)$ が得られる.

状況に応じて扱いやすい gluing で議論してよいことになる.

4 ホモロジーへの応用

次の事実はよく知られている.

命題 4.1（Mayer-Vietoris 列; cf. Theorem 25.1 in [9]） X を単体複体とする．A, B を X の部分複体で $X = A \cup B$ なるものとする．このとき次の完全列が得られる．

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow H_n(A\cap B) \longrightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \longrightarrow H_n(X)&\\ \longrightarrow H_{n-1}(A\cap B) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H_0(X) \longrightarrow \{0\}&\end{aligned}$$

一つの応用として $X = \mathcal{N}_{\pi_1\cup\pi_2}(G)$ とする．X の部分複体 A として先程の図の左の山 $\mathcal{N}_{\underline{\pi_1}\cup\pi_2}(G)$ を取り，部分複体 B として右の山 $\mathcal{N}_{\pi_1\cup\underline{\pi_2}}(G)$ を取る．このときの共通部分 $A\cap B$ は $\mathcal{N}_{\pi_1\cup\pi_2}(G)$ の gluing $\mathcal{G}^{\mathcal{N}}_{\pi_1,\pi_2}(G)$ である．これは様々な $\mathcal{H}$ の gluing $\mathcal{G}^{\mathcal{H}}_{\pi_1,\pi_2}(G)$ とホモトピー同値であった．さらに，この $A = \mathcal{N}_{\underline{\pi_1}\cup\pi_2}(G) = \mathcal{N}_{\pi_1\cup\pi_2}(G) \setminus \mathcal{N}_{\pi_2}(G)$ は定理 2.5 より $A \simeq \mathcal{N}_{\pi_1}(G)$ であり，また命題 2.3 より $A \simeq \mathcal{N}_{\pi_1}(G) \simeq \mathcal{L}_{\pi_1}(G)$ である．全く同様に $B \simeq \mathcal{N}_{\pi_2}(G) \simeq \mathcal{L}_{\pi_2}(G)$ が成り立つ．この状況の下で次のことに着目する．

1. $H_n(A) \cong H_n(\mathcal{L}_{\pi_1}(G)) \cong H_n(\mathcal{N}_{\pi_1}(G))$ や $H_n(B) \cong H_n(\mathcal{L}_{\pi_2}(G)) \cong H_n(\mathcal{N}_{\pi_2}(G))$ は $X = \mathcal{N}_{\pi_1\cup\pi_2}(G)$ より次元の下がったベキ零複体のホモロジーになっている．従って，これらは帰納的に既に知られているとしてよい．
2. A, B のホモロジーは既に分かっているとしてよいことを踏まえると，Mayer-Vietoris 列 が示唆していることは，共通部分 $A\cap B$, 即ち gluing $\mathcal{G}^{\mathcal{N}}_{\pi_1,\pi_2}(G)$ のホモロジーが分かれば全体 X のホモロジーが大体分かるはずということである．
3. そこで極端な状況を考え，$\mathcal{G} := \mathcal{G}^{\mathcal{N}}_{\pi_1,\pi_2}(G)$ が可縮であると仮定すると $H_n(\mathcal{G}) = \{0\}$ $(n \geq 1)$ となる．このとき Mayer-Vietoris 列から群同型 $H_n(X) \cong H_n(A) \oplus H_n(B)$ $(n \geq 2)$ が得られる．$H_1(X)$ と $H_0(X)$ については [5, pages 205, 206] を参照されたい．つまり X のホモロジーが確かに分かるのである．

以上，全体を振り返ってみると，p-部分群複体 $\mathcal{S}_p(G)$ の一般化として $\mathcal{N}_\pi(G)$ に着目する．この $\mathcal{N}_\pi(G)$ とホモトピー同値となるようなほぼほぼ極小な部分複体 $\mathcal{L}_\pi(G) \subseteq \mathcal{N}_\pi(G)$ を捕まえる．部分群 $U \in \mathcal{L}_\pi(G)$ は "π-radical" であるべし．その $\mathcal{L}_\pi(G)$ に関するホモトピー同値性の基本性質を洗い出し，さらに gluing complex を新たに導入して，その性質や振る舞いを考察したという話の大雑把な紹介であった．詳細については二本の論文 [3, 5] を参照されたい．

参考文献

[1] N. Iiyori and M. Sawabe, Representations of path algebras with applications to subgroup lattices and group characters, *Tokyo J. Math.* **37** (2014), 37–59.

[2] N. Iiyori and M. Sawabe, Simplicial complexes associated to quivers arising from finite groups, *Osaka J. Math.* **52** (2015), 161–204.

[3] N. Iiyori and M. Sawabe, Partially ordered sets of non-trivial nilpotent π-subgroups, *Osaka J. Math.* **53** (2016), 731–750.

[4] N. Iiyori and M. Sawabe, Homology of a certain associative algebra, *Hokkaido Math. J.* **46** (2017), 227–256.

[5] N. Iiyori and M. Sawabe, Partially ordered sets of non-trivial nilpotent π-subgroups II, *Topology Appl.* **231** (2017), 197–218.

[6] N. Iiyori and M. Sawabe, Homology of the complex of all non-trivial nilpotent subgroups of a finite non-solvable group, to appear in *Tokyo J. Math.*

[7] N. Iiyori and M. Sawabe, Representations of quivers with applications to finite groups, preprint.

[8] N. Iiyori and M. Sawabe, Class functions related to Brauer characters and quiver representations, preprint.

[9] J.R. Munkres, "Elements of algebraic topology", Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.

[10] 飯寄信保, 澤辺正人, Prime graphs and subgroup lattices of finite groups,
有限群とその表現, 頂点作用素代数, 代数的組合せ論の研究, 数理解析研究所講究録 **1872**, 2014.

[11] 澤辺正人, 有限群の部分群族とパス代数の表現,
第２９回代数的組合せ論シンポジウム（弘前大学）2012, 報告集.

[12] 澤辺正人, 有限群の Up-Down パスから得られる単体複体について,
第３０回代数的組合せ論シンポジウム（静岡大学）2013, 報告集.

[13] 澤辺正人, 複素既約指標の生成定数は１である,
第３１回代数的組合せ論シンポジウム（東北大学）2014, 報告集.

[14] 澤辺正人, Subgroup complexes of nilpotent subgroups,
有限群のコホモロジー論とその周辺, 数理解析研究所講究録 **1967**, 2015.